

ADI-FDTD算法的发展与改进

付强, 刘长军, 闫丽萍

(四川大学电子信息学院, 四川成都 610064)

摘要:介绍了近年来出现的交替方向隐式时域有限差分法(ADI-FDTD)。该方法无条件稳定, 时间步长不受Courant稳定条件的限制, 从而极大地节约计算时间。本文提供了微带线路计算实例。分析了该方法存在的不足, 针对ADI-FDTD内存占用量较大, 数值色散增加等问题, 讨论了一些改进方法, 并综述了ADI-FDTD方法的新进展和发展趋势。

关键词:时域有限差分法; 数值色散; 无条件稳定

中图分类号: TP301.6

文献标识码: A

文章编号: 1008-8814(2004)03-0001-04

1 引言

时域有限差分法(Finite-Difference Time-Domain - FDTD)是一种简单直观的全波分析时域算法, 该方法以Yee氏立体网格作为电磁场离散单元, 将麦克斯韦方程转化为差分方程, 能够方便有效的结合计算机技术处理复杂的电磁场问题, 目前已经在电磁学的各个领域得到了广泛的应用。然而, 应用传统的FDTD方法也明显体现出其不足之处, 首先, 为减小差分近似所带来的数值色散, 空间网格尺寸必须远小于波长, 一般认为空间步长要小于波长的十二分之一; 另外为了满足Courant稳定性条件, 时间步长的选取又必须由空间步长的最小值决定。对于实际工程中的高频信号传输以及电大尺寸对象的计算, 空间步长的减小引起时间步长的相应减小, 最终导致计算时间的大幅度增加, 这正是传统FDTD所无法有效解决的一个主要问题。

2 ADI-FDTD的计算公式及迭代过程

ADI-FDTD方法中的电磁场分量在空间网格的分布方式与传统FDTD方法一致。但需将原来一个时间步的计算分成两次来进行。下面分别以两个步骤中的 E_x , H_y 为例, 给出三维电磁场问题的ADI-FDTD具体迭代公式。该计算公式可适用于非均匀有耗媒质, 空间网格非一致的普遍情况^[1]。

<第(n)步到第(n+1/2)步>:

收稿日期: 2004-05-12

作者简介: 付强(1973-),男,北京市人,硕士,主要从事电磁场及微波技术方面的研究工作。

刘长军(1973-),男,河北人,博士后,副教授,主要从事微波化学、计算电磁学和生物电磁学方面的研究。

闫丽萍(1972-),男,河北人,博士,副教授,主要从事电磁场数值计算,GA优化算法等方面的工作。

*本文得到NSFC(编号: 60301004)的资助

$$E_x^{n+1/2}(i+1/2, j, k) = Ca(i+1/2, j, k) \cdot E_x^n(i+1/2, j, k) + Cb(i+1/2, j, k) \cdot [(H_z^n(i+1/2, j+1/2, k) - H_z^n(i+1/2, j-1/2, k)) / \Delta y(j) - (H_y^{n+1/2}(i+1/2, j, k+1/2) - H_y^{n+1/2}(i+1/2, j, k-1/2)) / \Delta z(k)] \quad (1)$$

$$H_y^{n+1/2}(i+1/2, j, k+1/2) = H_y^n(i+1/2, j, k+1/2) + Cq(i+1/2, j, k+1/2) \cdot [(E_z^n(i+1, j, k+1/2) - E_z^n(i, j, k+1/2)) / \Delta x(i) - (E_x^{n+1/2}(i+1/2, j, k+1) - E_x^{n+1/2}(i+1/2, j, k)) / \Delta z(k)] \quad (2)$$

<第(n+1/2)步到第(n+1)步>:

$$E_x^{n+1}(i+1/2, j, k) = Ca(i+1/2, j, k) \cdot E_x^{n+1/2}(i+1/2, j, k) + Cb(i+1/2, j, k) \cdot [(H_z^{n+1/2}(i+1/2, j+1/2, k) - H_z^{n+1/2}(i+1/2, j-1/2, k)) / \Delta y(j) - (H_y^{n+1/2}(i+1/2, j, k+1/2) - H_y^{n+1/2}(i+1/2, j, k-1/2)) / \Delta z(k)] \quad (3)$$

$$H_z^{n+1}(i+1/2, j+1/2, k) = H_z^{n+1/2}(i+1/2, j+1/2, k) + Cq(i+1/2, j+1/2, k) \cdot [(E_x^{n+1/2}(i+1/2, j+1, k) - E_x^{n+1/2}(i+1/2, j, k)) / \Delta y(j) - (E_y^{n+1/2}(i+1, j+1/2, k) - E_y^{n+1/2}(i, j+1/2, k)) / \Delta x(i)] \quad (4)$$

公式中系数分别如下:

$$Ca(i, j, k) = \frac{2e(i, j, k) - s(i, j, k)\Delta t}{2e(i, j, k) + s(i, j, k)\Delta t}$$

$$Cb(i, j, k) = \frac{2\Delta t}{2e(i, j, k) + s(i, j, k)\Delta t}$$

$$Cq(i, j, k) = \frac{\Delta t}{m(i, j, k)}$$

(1)~(4)式均为隐式, 在方程的左右两边含有定义为相同时刻的场分量, 不能直接用来进行编程计算, 需对其中某些方程式进行联立消元, 进一步推导其迭代公式。将(2)代入(1), 消去 $H_y^{n+1/2}$ 分量, 可得如下差分方程:

$$\begin{aligned}
& -aE_x^{n+1/2}(i+1/2, j, k-1) + bE_x^{n+1/2}(i+1/2, j, k) \\
& -gE_x^{n+1/2}(i+1/2, j, k+1) \\
& = p \cdot E_x^n(i+1/2, j, k) + [H_z^n(i+1/2, j+1/2, k) \\
& - H_z^n(i+1/2, j-1/2, k)] / \Delta y(j) \\
& - [H_y^n(i+1/2, j, k+1/2) - H_y^n(i+1/2, j, k-1/2)] / \Delta z(k) \\
& + q \cdot [E_z^n(i+1, j, k-1/2) - E_z^n(i, j, k-1/2)] / [\Delta x(i) \Delta z(k)] \\
& - r \cdot [E_z^n(i+1, j, k+1/2) - E_z^n(i, j, k+1/2)] / [\Delta x(i) \Delta z(k)]
\end{aligned} \quad (1')$$

其中

$$\begin{aligned}
a &= Cq(i+1/2, j, k-1/2) / \Delta z(k)^2 \\
b &= 1/Cb(i+1/2, j, k) + a + g \\
g &= Cq(i+1/2, j, k+1/2) / \Delta z(k)^2 \\
p &= Ca(i+1/2, j, k) / Cb(i+1/2, j, k) \\
q &= Cq(i+1/2, j, k-1/2) \\
r &= Cq(i+1/2, j, k+1/2)
\end{aligned}$$

其余电场分量可用同样的方法得到, 且均满足形式如(1)的方程。在整个网格空间求解方程组, 即可得到各电场分量的值, 再由(2)可以求出 $H_y^{n+1/2}$ 的值。类似地, 可以完成 $n+1/2$ 时刻全部场量的计算。采用同样的方法, 可以计算后半时间步长的全部电磁场分量。文献[2]中已从理论上证明该算法是无条件稳定的, 即时间步长不受空间步长大小的限制。

3 计算应用实例

目前, ADI-FDTD方法已经在电磁仿真计算中得到了广泛地运用。

超大规模集成电路(VLSI)的电磁兼容仿真已是电路设计的一个必要环节, FDTD方法是灵活有效的电磁仿真手段, 但是VLSI的器件联结部位几何尺寸极小(相对于整个电路结构), 用ADI-FDTD方法可以大大节约计算时间。以一个5mm微带传输线为例说明实际计算效果。该结构如图1所示。微带宽度为10 μm , 在微带与底座之间为1 μm 厚的低损耗介质层($\epsilon_r = 4.0, s = 0.5 \times 10^{-3} \text{ S/m}$), 微带之上是自由空间。在微带线的一端加源, 另外一端为开路终端。所加的激励为一基带高斯脉冲: $E_{\text{source}} = E_0 e^{-(t-t_0)^2/t^2}$, 其中 $\tau = 5\text{ps}$, $t_0 = 3\tau$ 。采用传统的FDTD和ADI-FDTD两种方法进行比较计算。由该脉冲的频谱可以计算出在介质中传播的最小工作波长为大约2mm。因此空间网格尺寸不能大于0.2mm。为了仿真极薄的介质层, 必须取 $x=1\mu\text{m}$, 另外取 $x=20\mu\text{m}$, $y=5\mu\text{m}$ 。可以看出计算对象的最小必要几何空间尺寸(介质层的高度)远小于工作波长, 对于传统的FDTD方法, 满足Courant条件的 Δt 的取值($\Delta t \leq 3.26\text{fs}$)会

远小于数值计算准确性对 Δt 的需要。相应地, 传统FDTD方法中取 $\Delta t = 3.0\text{fs}$, 在ADI-FDTD方法中取 $\Delta t = 60\text{fs}$ 。

首先, 在微带线源端0.5mm处设观察点, 分别记录由两种方法计算的接地板和微带之间在该点的 E_z 波形图如图2所示。对于60ps的计算周期, 传统FDTD方法需要计算20000个时间步, 因此在图2仅可见入射脉冲通过观察点。而ADI-FDTD方法计算60ps仅需1000个时间步, 本例仿真2000个时间步, 所以图中不仅可见入射脉冲, 还可见反射波和二次反射波在观察点的叠加波形。两种计算结果均用 E_z 的峰值归一化。由图可见, 两种方法计算的波形极为吻合。

第二步, 将距传输线负载2.0, 1.5, 1.0, 0.5和0.0mm处设为观察点。采用ADI-FDTD方法计算, 图3显示了在5个观察点的波形。入射及反射脉冲在时间轴上的叠加变化程度取决于观察点的位置, 计算结果与理论分析的传输线的开路终端时域反射结果一致。

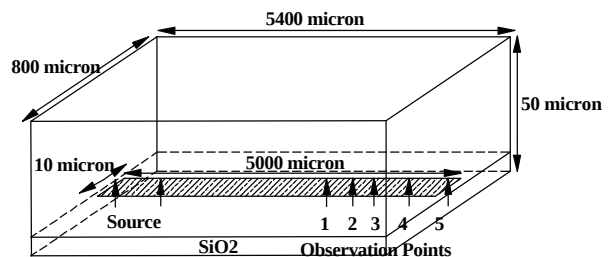


图1 微带传输线模型

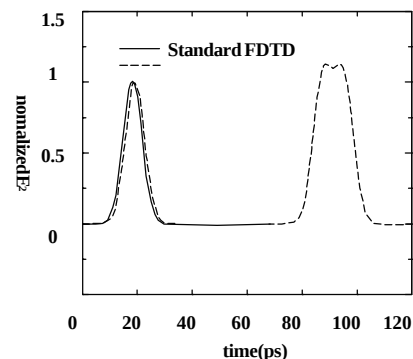


图2 距微带源端0.5mm观察点的 E_z 场量

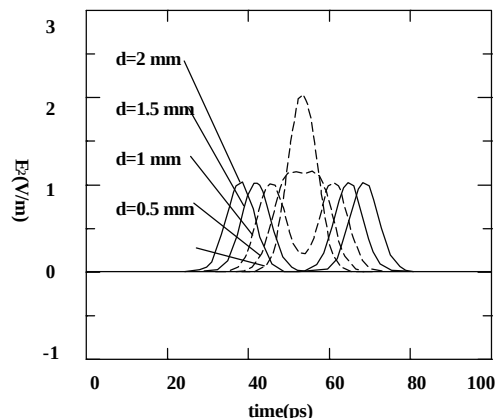


图3 由ADI-FDTD计算的5个观察点的 E_z 场分量

目前, ADI-FDTD方法已经在许多具体结构的电磁仿真中应用, 如: T形槽线结构在时域结合近远场变换求解天线方向图, 介质壁附近的单极子天线, 谐振腔, 光电子带隙结构, 开缝平行板波导, 圆柱微带线, 微带振荡电路和滤波器, 人体头部SAR(Specific Absorption Rate)分布等都已见有应用ADI-FDTD方法计算的报道。

4 ADI-FDTD方法的改进及发展方向

理论分析和实际应用都已经证明ADI-FDTD方法是一种行之有效的代替传统FDTD的改进算法, 但其仍有自己的不足之处。针对其内存使用量较大, 数值色散增加等问题, 提出如下一些改进方案和研究方向。

4.1 ADI/R-FDTD方法

由于在ADI-FDTD方法的迭代过程中需要求解方程组, 所以计算中对内存的需求将会提高, 至少比传统FDTD方法多占用30%。因此有必要对此进行改进。目前一个比较有效的做法是将ADI-FDTD方法和能够减少内存使用量的R-FDTD^[3]方法结合起来, 产生新的FDTD迭代算式。为简化说明, 下面以在真空中传播的二维TE波为例。除了Maxwell方程中的两个旋度方程以外, 还利用了电场的散度方程 $\nabla \cdot (eE) = 0$ 的时间及空间差分格式:

$$\begin{aligned} & [E_y^{n+1/2}(i, j+1/2) - E_y^{n+1/2}(i, j-1/2)]\Delta x \\ & = -[E_x^{n+1/2}(i+1/2, j) - E_x^{n+1/2}(i-1/2, j)]\Delta y \end{aligned} \quad (5)$$

利用(5)式和Maxwell方程旋度式偏微分方程的ADI解, 即可得到具有ADI-FDTD和R-FDTD两种方法优点的ADI/R-FDTD方法的计算式。用ADI/R-FDTD计算的实际算例数值结果与传统方法结果一致, 证明了这是一种可以实际应用的有效方法。

4.2 传统FDTD和ADI-FDTD的混合方法^[4]

把计算区域分成两部分: 用较大网格划分的区域和需要用精细网格划分的区域。前者使用传统FDTD方法, 后者使用ADI-FDTD方法。在两区域的交界面采用新的网格配置和迭代方案。通过适当划分两区域的网格, 可以在整个计算区域全部采用较大网格区域确定的时间步长(因为精细网格区域采用ADI-FDTD方法, 时间步长不受CFL条件限制)。由此可以使得两区域的时间步长取最大值, 而计算的内存使用量保持在最小值。

4.3 高阶FDTD差分格式

将问题空间离散为网格空间导致数值色散是偏微分方程的多种数值解法(包括FDTD等方法)所具有的共同缺点。如欲尽量抑制这种数值色散, 一种简单的方法是增加网格

的密度, 但这样做无疑增加了所需计算资源; 另一种方法是采用高阶差分。本文在第二部分所提供的普遍ADI-FDTD方法在空间上取的是二阶近似, 为了进一步提高计算精度, 可将Maxwell方程的空间近似式取四阶有限差分。例如:

$$\begin{aligned} \partial H_z^n(i, j, k)/\partial y = & [-H_z^n(i+1/2, j+3/2, k) \\ & + 27H_z^n(i+1/2, j+1/2, k) - 27H_z^n(i+1/2, j-1/2, k) \\ & + H_z^n(i+1/2, j-3/2, k)] + O(\Delta y^2) \end{aligned} \quad (6)$$

文献[5]中已详细论证了采用这种高阶差分迭代式仍然是无条件稳定的, 而数值色散比二阶差分算法显著减小。这种方法的缺点是增加了计算的复杂性。

4.4 在FDTD算法的运算空间增加各向异性介质控制数值色散

Juntunen^[6]等采用在FDTD算法的运算空间增加各向异性介质的手段, 达到了抑制数值色散、减小误差的目的。把这种方法发展地应用到ADI-FDTD当中, 发现其同样能有效地控制数值色散, 并且效果要优于在传统FDTD方法中的应用, 从而一定程度上克服了ADI-FDTD数值色散较为明显的缺点。

以二维空间TE波为研究对象, 在所研究的空间添加一种简单的各向异性媒质, 设其对应的介电常数: $e_r = \text{diag}(e_x, e_y)$, 利用此种情况下对应的传统FDTD时间稳定性条件和色散关系, 并引入参数Z与R分别表示不同方向空间步长比, 以及真空中波长与空间步长的关系: $Z = \Delta x / \Delta y$, $R = l / \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$, 可得超越方程:

$$\begin{aligned} & \left[\frac{e_x + e_y Z^2}{e_x e_y q^2 Z^2} \sin^2 \left(\frac{pqZ \sqrt{e_x e_y}}{R \sqrt{1+Z^2} \sqrt{e_x + e_y Z^2}} \right) \right]^2 \\ & = \frac{\sin^2 \left(\frac{p \sin a}{AR \sqrt{1+Z^2}} \right)}{e_x} + \frac{\sin^2 \left(\frac{pZ \cos a}{AR \sqrt{1+Z^2}} \right)}{e_y Z^2} \end{aligned} \quad (7)$$

式中 $A = c'/c_0 = l'/l_0$, 用 l' , l_0 , c' , c_0 分别表示网格空间和真空对应的数值波长以及相速。A是相速数值解与理想值的比, A恰好为1时, 两者一致, 属理想的无相速误差情况。理论上, 对于确定的频点, 利用(5)式可以求出A=1时不同方向介质的介电常数, 即通过在计算空间添加各向异性的媒质, 可以达到修正数值相速, 获得理想相速的目的。

由于ADI-FDTD实质上是显式FDTD方法的变形, 两种方法遵循相同的色散关系, 因而这种减少数值色散的方

法也应该同样适用于ADI-FDTD方法。ADI-FDTD方法包含两个“亚时间步”，以 E_x 为例，添加介电常数为 ϵ_r 的各向异性媒质后，修改后的迭代公式为：

$$E_x^{n+1/2}(i+1/2, j) = E_x^n(i+1/2, j) + \frac{\Delta t}{2\epsilon\epsilon_x\Delta y} \cdot [H_z^n(i+1/2, j+1/2)] \quad (8)$$

$$\begin{aligned} E_x^{n+1}(i+1/2, j-1) &= \left[\frac{2\sqrt{\epsilon\epsilon_x}\Delta y}{\Delta t} \right]^2 \cdot E_x^{n+1/2}(i+1/2, j) \\ &+ E_x^{n+1/2}(i+1/2, j+1) - \left[\frac{2\sqrt{\epsilon\epsilon_x}\Delta y}{\Delta t} \right]^2 \cdot E_x^{n+1/2}(i+1/2, j) \\ &- \frac{2m\Delta y}{\Delta t} \cdot [H_z^{n+1/2}(i+1/2, j-1/2) - H_z^{n+1/2}(i+1/2, j+1/2)] \\ &+ \frac{\Delta y}{\Delta x} [E_y^{n+1/2}(i+1, j+1/2) - E_y^{n+1/2}(i, j+1/2) \\ &- E_y^{n+1/2}(i+1, j-1/2) + E_y^{n+1/2}(i, j-1/2)] \end{aligned} \quad (9)$$

其中 ϵ 为真实介质的介电常数。采用ADI-FDTD算法时，对于(7)式中的 q 可大于1。

实际计算表明^[7]，采用该方法并选取适当的介电常数，即可改善ADI-FDTD相速特性，很大程度上消除其色散现象。该方法实施较为简便，根据所关心的频谱范围，经过简单的计算，既可获得能在较宽的频带范围改善相速特性的介电常数。该方法有待进一步研究的问题包括：如何处理在消除某段频率范围色散误差时出现的低频部分误差增加的情况，以及能否在计算空间中自由地控制更宽频带范围的相速，令其同时接近相速理想值。

5 结 语

本文系统介绍了近年来出现的一种切实有效提高传统FDTD算法效率的改进方法ADI-FDTD方法，通过理论分析和计算实例证明了该方法的实用性，与传统的FDTD方法相比可大大节省计算时间。同时针对其自身的不足，讨论了ADI-FDTD方法的新进展及其发展方向。

总之，为保证计算的准确高效性，ADI-FDTD今后的发展必须在原有的无条件稳定、计算时间短等优点的基础之上，尽量减少内存使用量，简化计算的复杂性，并控制其数值色散。随着ADI-FDTD的进一步深入研究，ADI-FDTD将在纳米计算电磁学、微波化学、生物电磁学等新兴的交叉学科中得到更广泛的应用。

参 考 文 献：

- [1] T Namiki. 3-D ADI-FDTD method unconditionally stable time-domain algorithm for solving full vector Maxwells equations [J]. IEEE Trans. Microwave Theory and Techniques, 2000, 48(10): 1743-1748.
- [2] T Namiki. A new FDTD algorithm based on alternating-direction implicit method [J]. IEEE Trans. Microwave Theory and Techniques, 1999, 47(10): 2003-2007.
- [3] G D Kondylis, F D Flaviis, G J Pottie, and T Itoh. A memory-efficient formulation of the finite-difference time-domain method for the solution of Maxwell equation [J]. IEEE Trans. Microwave Theory and Techniques, 2001, 49(7): 1310-1320.
- [4] Zhizhang Chen, Ifitbar Abmed. A Hybrid ADI-FDTD Scheme and its comparisons with the FDTD method [S]. IEEE Antennas and Propagation Society, AP-S International Symposium (Digest), 2003, vol 4: 360-363.
- [5] Fenghua Zheng, Zhizhang Chen, and Jiazong Zhang. Development of three-dimensional unconditionally stable finite-difference time-domain methods [S]. IEEE MTT-S International Microwave Symposium Digest, 2000, vol 2: 1117-1120.
- [6] J S Juntunen and T D Tsiboukis. Reduction of numerical dispersion in FDTD method through artificial anisotropy [J]. IEEE Trans. Microwave Theory and Tech., 2000, 48 (9): 582-588.
- [7] 刘波，任武等。一种有效减少ADI-FDTD数值色散的方法 [J]. 微波学报. 2003, 19(2): 19-23.

Recent Developments and Improvement on the ADI-FDTD Method

FU Qiang LIU Changjun YAN Liping

School of Electronics and Information Science, Sichuan University, Chengdu 610064, China

Abstract: Some approaches of ADI-FDTD algorithm are presented in this paper. The method is unconditionally stable, and the maximum time-step size is not limited by the Courant-Friedrich-Levy (CFL) condition. As a result, the CPU time may be greatly saved. Numerical results of a microstrip structure achieved by ADI-FDTD are presented. To reduce the memory requirements and numerical dispersion of ADI-FDTD, some improvements, such as hybrid method and high-order method, are discussed. The method may be applied to simulations of complex structures especially those including both coarse and refined objects.

Key words: FDTD, Unconditionally Stable, Numerical dispersion